

Theorie der Bewegung

der

Himmelskörper um die Sonne

nebst deren Bahnbestimmung

in elementarer Darstellung.

Von

Dr. Johann Frischauf,
Professor an der Universität zu Graz.

Mit einer Figurentafel.

Graz,
Leuschner & Lubensky,
k. k. Univ.-Buchhandlung.
1868.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Vorwort.

Ich beabsichtige in dieser Schrift eine für Jedermann, der sich die gewöhnlichsten Kenntnisse aus der Mathematik angeeignet hat, verständliche Darstellung der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen nebst den dazu nothwendigen Sätzen aus der theoretischen Astronomie zu geben. Es wurde hierbei Gauss' Methode eine elliptische Bahn aus drei Orten und die Olbers'sche Methode eine parabolische Bahn zu bestimmen dargestellt. Nebenbetrachtungen sowie Variationen des Problems wurden, um den Ueberblick nicht zu stören, sorgfältig vermieden; hinsichtlich dessen verweise ich auf die vom Herrn Kriegsrath Carl Haase herausgegebene „Uebersetzung von Gauss' theoria motus corporum coelestium," welche eine vollständige Literatur des Problems der Bahnbestimmung enthält, und auf die bekannte Schrift von Olbers „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen."

Graz im November 1867.

J. Frischauf.

Erster Theil.

Allgemeine Relationen zwischen den Grössen, durch welche die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmt werden.

Erster Abschnitt.

Relationen, die einen einzelnen Ort in der Bahn betreffen.

1.

Betrachtet man die Planeten als mathematische Puncte, und berücksichtiget man bloss die Anziehung der Sonne; so geschieht die Bewegung derselben nach folgenden Gesetzen:

I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren gemeinsamem Brennpuncte sich der Mittelpunct der Sonne befindet.

II. Die von der Sonne nach den Planeten gezogene Gerade überstreicht der Zeit proportionale Flächen.

III. Die Würfel der grossen Axen zweier Planeten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufszeiten.

Diese Gesetze sind von Kepler (geb. 1571, gest. 1630) gefunden worden.

Berücksichtigt man die Anziehung des Planeten auf die Sonne, so ist der Würfel der grossen Axe dem Producte

aus dem Quadrate der Umlaufszeit mit der Summe der Massen der Sonne und des Planeten proportional.

Es stelle die Ellipse der Figur (Fig. 1) die Bahn eines Planeten vor, im Brennpuncte S sei die Sonne. Ist AP die grosse Axe der Ellipse, so ist der dem Brennpuncte S näher liegende Punct P zugleich derjenige Punct der Bahn, in welchem der Planet der Sonne am nächsten kommt, und wird daher das Perihelium oder die Sonnennähe genannt.

Im anderen Endpuncte A befindet sich der Planet von der Sonne am weitesten entfernt, der Punct A wird daher das Aphelium oder die Sonnenferne genannt. Beide Puncte heisst man Apsiden, und die Gerade AP, sobald nur ihre Lage berücksichtiget wird, Apsidenlinie.

Ist O der Mittelpunct der Ellipse, $AO = OP = a$ die halbe grosse Axe, $OS = ae$, so heisst e die Excentricität. Die kleinste Entfernung des Planeten von der Sonne ist daher $SP = OP - OS = a(1 - e)$, die grösste $SA = OA + SO = a(1 + e)$, daher die mittlere $= a =$ der halben grossen Axe. In der mittleren Entfernung befindet sich der Planet, wenn er durch den einen oder den anderen Endpunct der kleinen Axe geht.

Befindet sich der Planet im Puncte L seiner Bahn, so heisst die Gerade $SL = r$ der Radius Vector, und der Winkel $PSL = v$ die wahre Anomalie des Planeten. Dieser Winkel wird vom Perihelium im Sinne der Bewegung des Planeten (in der Figur durch einen beigesetzten Pfeil ausgedrückt) von 0 bis 360° gezählt. Die beiden Stücke r und v sind die Polarcoordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne als Anfangspunct und die Apsidenlinie als Grundlinie.

2.

Aufgabe. Aus der wahren Anomalie v die Zeit t, in welcher sie vom Planeten beschrieben wird, zu finden.

Auflösung. Ist U die Umlaufszeit des Planeten, so verhält sich $t : U$ wie der Sector PSL zur Fläche der ganzen Ellipse. Um das letztere Verhältniss zu berechnen, bedient man sich des sogenannten excentrischen Kreises, eines Kreises, welcher in der Ebene der Ellipse über der grossen Axe AP als Durchmesser beschrieben wird. Ein von L auf AP gefälltes Perpendikel LJ treffe den Kreis in K. Der Winkel POK heisst die excentrische Anomalie und werde mit E bezeichnet.

Nun ist $SJ = OJ - OS$, d. h.

(1) $$r \cos v = a \cos E - ae.$$

Aus der Polargleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos v}$$

folgt, wenn man den Werth von $r \cos v$ aus (1) in diese Gleichung setzt,

(2) $$r = a - ae \cos E.$$

Aus (1) und (2) folgt durch Addition und Subtraction:

$$r\,(1 + \cos v) = a(1-e)\,(1 + \cos E),$$
$$r\,(1 - \cos v) = a(1+e)\,(1 - \cos E).$$

Zieht man aus diesen Gleichungen die Quardratwurzel aus, so erhält man

(3) $$\sqrt{r} \cos \tfrac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)} \cos \tfrac{1}{2} E$$

(4) $$\sqrt{r} \sin \tfrac{1}{2} v = \sqrt{a\,(1+e)} \sin \tfrac{1}{2} E.$$

Durch Division und Multiplication erhält man

(5) $$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} E$$

(6) $$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Aus (6) folgt $r \sin v : a \sin E$ d. i. $LJ : KJ = \sqrt{1-e^2} : 1$ d. h. die Ordinate in der Ellipse verhält sich zur Ordinate des excentrischen Kreises wie die kleine Axe zur grossen. Denkt man sich daher den Kreis um AP gedreht, bis die rechtwinklige Projection seines auf AP perpendiculären Durchmessers auf die unbewegt bleibende Ebene der Ellipse mit der kleinen Axe der letzteren identisch wird, so wird L die Projection von K, und ebenso jeder andere Punct der Ellipse die Projection eines Punctes des Kreises, mithin die ganze Ellipsenfläche, welche G heisse, die Projection der Kreisfläche $= \pi a^2$, sowie der Theil SPL der ersteren die Projection des Theils SPK des letzteren. Da sich nun je zwei Theile einer Ebene wie ihre Projectionen auf eine andere Ebene verhalten, so wird sein

$$U : t = G : SPL = \pi a^2 : SPK.$$

Es ist aber $\quad SPK = OPK - OSK$

$$= \tfrac{1}{2}\, OP \cdot PK - \tfrac{1}{2}\, OS \cdot JK = \tfrac{1}{2}\, a \cdot a\, E - \tfrac{1}{2}\, ae \cdot a \sin E,$$

also $\quad U : t = 2\pi : E - e \sin E$, setzt man

$$\frac{2\pi}{U} = \mu,$$

so wird

(7) $$\mu t = E - e \sin E.$$

Die Grösse $\mu t = M$ heisst mittlere Anomalie, die Grösse μ mittlere Bewegung in der Zeiteinheit. Aus v erhält man durch (5) die excentrische Anomalie E und damit nach (7) die mittlere Anomalie M oder die Zeit t.

In der Gleichung (7) ist der Hülfswinkel E in Theilen des Halbmessers auszudrücken, drückt man $\frac{2\pi}{U}$, $e \sin E$ im Gradmasse aus, so kann auch E in Graden beibehalten werden.

Zusatz. Die Fläche der Ellipse verhält sich zur

Fläche des Kreises wie $\sqrt{1-e^2} : 1$. Es ist daher $G = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}$. Der Ausdruck $\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} : U$ stellt die in der Zeiteinheit vom Radius Vector beschriebene Fläche, d. i. die Flächengeschwindigkeit dar. Sind m, m' die Massen zweier Planeten, die Masse der Sonne $= 1$ gesetzt, a, a' ihre mittleren Entfernungen, U, U' ihre Umlaufszeiten; so ist nach dem verbesserten dritten Kepler'schen Gesetze

$$a^3 : a'^3 = U^2 (1 + m) : U'^2 (1 + m').$$

Es ist daher $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{U\sqrt{1+m}}$, also auch $\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{U\sqrt{1+m}}$ für alle Planeten constant.

Bezeichnet man mit k den Werth dieser Constante, so wird die Flächengeschwindigkeit $= \frac{k}{2}\sqrt{1+m}\sqrt{p}$, die mittlere Bewegung $\mu = k\sqrt{1+m} : a^{\frac{3}{2}}$.

Die Grösse k heisst die Constante der *theoria motus*, Gauss bestimmt deren Werth aus der Bewegung der Erde. Als Einheit der Distanzen wird die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag angenommen. Mit den Werthen

$$U = 365.2563835, \quad m = \tfrac{1}{354710} = 0.0000028192$$

erhält man

$$\log k = 8.2355814414$$
$$k = 0.01720209895.$$

3.

Die umgekehrte, unter dem Namen des Kepler'schen Problems berühmte Aufgabe, nämlich aus der mittleren Anomalie die wahre und den Radius Vector zu finden, kommt in der Anwendung weit häufiger vor.

Zunächst ist die Gleichung $E = M + e \sin E$ nach E aufzulösen. Die Auflösung kann entweder durch Reihen

oder indirect durch Versuche bewerkstelligt werden. Man beginnt mit einem Näherungswerth E_0 und rechnet nun

$$E_1 = M + e \sin E_0$$
$$E_2 = M + e \sin E_1$$
$$E_3 = M + e \sin E_2$$
$$\vdots$$

so lange, bis man keine verschiedenen Werthe von E erhält; als E_0 kann man, wenn kein anderer Näherungswerth bekannt ist, M annehmen.

Beispiel. Es sei $M = 332^0\ 28'\ 54.''77$ $e = 0.2453162$, daher $\log e$ in Secunden $= 4.7041513$. Daraus folgt $E = 324^0\ 16'\ 29.''55$. Ist nun $\log a = 0.4224389$, so wird $v = 315^0\ 1'\ 23.''00$, $\log r = 0.3259878$.

4.

Die Kometen bewegen sich in Bahnen, die man in erster Annäherung als Parabeln betrachten kann. Der im Zusatze von Art. 2. gefundene Ausdruck für die Flächengeschwindigkeit gestattet eine Anwendung des zweiten und dritten Kepler'schen Gesetzes auf die Bewegung eines Himmelskörpers in einer Parabel.

Ist der Bogen PL ein Stück einer Parabel vom Parameter $2p$, so ist das Flächenstück JPL der Parabel $= \frac{2}{3} JP.JL$. Die Polargleichung der Parabel lautet

$$r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v^2}.$$

Die in der Zeit t vom Radius Vector durchstrichene Fläche $SPL = \frac{k}{2} \sqrt{1+m}\sqrt{p}\,t =$ Dreieck SJL + Fläche JPL

$$= \tfrac{1}{2}\, SJ.JL + \tfrac{2}{3}\, JP.JL.$$

Nun ist

$$JL = r \sin v = p \text{ tang } \tfrac{1}{2} v, \; SJ = r \cos v = \tfrac{p}{2} (1 - \text{tang } \tfrac{1}{2} v^2)$$

$$JP = SP - SJ = \tfrac{p}{2} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^2.$$

Setzt man $\frac{p}{2} = q$, so ist q die kürzeste Distanz des Kometen von der Sonne, und es wird

$$\frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{2}\, q^{\frac{3}{2}}}\, t = \text{tang } \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^3. \tag{8}$$

Für Kometen setzt man immer $m = 0$, multiplicirt man ferner (8) mit 75 und setzt $\frac{75k}{\sqrt{2}} = C$, wo $\log C = 9.9601277182$ ist; so wird (8) übergehen in

$$\frac{C t}{q^{\frac{3}{2}}} = 75 \text{ tang } \tfrac{1}{2} v + 25 \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^3. \tag{8*}$$

Die Grösse $\frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} = \mu$ heisst mittlere tägliche Bewegung, die Grösse $\frac{C}{q^{\frac{3}{2}}}\, t = M$ mittlere Anomalie des Kometen. Aus t erhält man v und umgekehrt aus v die Zeit t. Die Barker'sche Tafel gibt für den Werth von v die Grösse M und umgekehrt.

Zweiter Abschnitt.

Relationen zwischen mehreren Orten in der Bahn.

5.

Hülfssätze: Bedeuten A, B, C drei beliebige Winkel, so ist

I. $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$,
II. $\cos A \sin(B-C) + \cos B \sin(C-A) + \cos C \sin(A-B) = 0$,

wie man durch Entwicklung von $\sin(B-C) \ldots$ unmittelbar findet.

6.

Aufgabe. Es seien $r, v; r', v'$ die Polarcoordinaten zweier Orte eines Himmelskörpers in der Bahn, t die Zeit, welche derselbe braucht, um vom ersten Ort zum zweiten zu gelangen; aus $r, r', v'-v, t$ die Elemente des Planeten in der Bahn zu bestimmen.

Auflösung.

I. Für die Ellipse. Aus den Gleichungen

$$\sqrt{r}\, \sin \tfrac{1}{2} v = \sqrt{a(1+e)}\, \sin \tfrac{1}{2} E$$
$$\sqrt{r}\, \cos \tfrac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)}\, \cos \tfrac{1}{2} E$$
$$\sqrt{r'}\, \sin \tfrac{1}{2} v' = \sqrt{a(1+e)}\, \sin \tfrac{1}{2} E'$$
$$\sqrt{r'}\, \cos \tfrac{1}{2} v' = \sqrt{a(1-e)}\, \cos \tfrac{1}{2} E'$$

folgt

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{rr'}\, \sin \tfrac{1}{2} v \cos \tfrac{1}{2} v' &= a\sqrt{1-e^2}\, \sin \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E' \\
\sqrt{rr'}\, \cos \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v' &= a\sqrt{1-e^2}\, \cos \tfrac{1}{2} E \sin \tfrac{1}{2} E' \\
\sqrt{rr'}\, \sin \tfrac{1}{2} v \sin \tfrac{1}{2} v' &= a(1+e)\, \sin \tfrac{1}{2} E \sin \tfrac{1}{2} E' \\
\sqrt{rr'}\, \cos \tfrac{1}{2} v \cos \tfrac{1}{2} v' &= a(1-e)\, \cos \tfrac{1}{2} E \cos \tfrac{1}{2} E'
\end{aligned}\right\} (A)$$

Setzt man Kürze halber $v' - v = 2f$, $E' - E = 2g$, $E' + E = 2G$, so erhält man aus den Gleichungen (A) leicht folgende Ausdrücke:

$$(1) \qquad \sqrt{rr'}\, \sin f = a\sqrt{1-e^2}\, \sin g$$

$$(2) \qquad \sqrt{rr'}\, \cos f = a \cos g - ae \cos G.$$

Aus $r = a - ae \cos E$, $r' = a - ae \cos E'$ folgt

$$r' + r = 2a - 2ae \cos g \cos G = 2a \sin g^2 + 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}$$

indem statt $ae \cos G$ aus (2) der Werth $a \cos g - \sqrt{rr'} \cos f$ gesetzt wird; woraus dann

$$(3) \qquad a = \frac{r + r' - 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2},$$

oder

$$a = \frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'} + 4 \cos f \sin \tfrac{1}{2} g^2 \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2}.$$

Setzt man, wenn $\cos f$ positiv ist,

(4) $$r + r' - 2\cos f\sqrt{rr'} = 4\cos f\sqrt{rr'}\,l,$$

so wird

(5) $$a = \frac{2(l + \sin\frac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

und $\sqrt{a} = \pm\frac{\sqrt{2(l + \sin\frac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}}{\sin g}$, wo das obere oder untere Zeichen stattfindet, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Ist aber $\cos f$ negativ, so setze man

(4*) $$r + r' - 2\cos f\sqrt{rr'} = -4\cos f\sqrt{rr'}\,L$$

und es wird

(5*) $$a = \frac{-2(L - \sin\frac{1}{2}g^2)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2}.$$

Sind τ, τ' die Zeiten, welche seit dem Durchgange durch das Perihel verflossen sind, also $\tau' - \tau = t$; so ist, die Masse des Planeten gleich Null gesetzt:

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\tau = E - e\sin E,\quad \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}\tau' = E' - e\sin E',\ \text{also}$$

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = E' - E - e(\sin E' - \sin E)$$

$$= 2g - 2e\sin g\cos G.$$

Setzt man statt $e\cos G$ den Werth aus (2), so wird

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2\cos f\sin g\frac{\sqrt{rr'}}{a}.$$

Substituirt man für $\sqrt{a}$ den Werth, und setzt der Kürze wegen

(6) $$\frac{kt}{2^{\frac{3}{2}}\cos f^{\frac{3}{2}}(rr')^{\frac{3}{4}}} = m,$$

so wird

(7) $$\pm m = (l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (l + \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}\right),$$

wo für m das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Ist $\cos f$ negativ, so setze man

(6*) $$\frac{kt}{2^{\frac{3}{2}}(-\cos f)^{\frac{3}{2}}(rr')^{\frac{3}{4}}} = M$$

(7*) $$\pm M = -(L - \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (L - \sin\tfrac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}\right),$$

wo das obere Zeichen gilt für $\sin g$ positiv, das untere für $\sin g$ negativ.

Zunächst ist die Gleichung (7) oder (7*) nach g aufzulösen. Es sei zunächst g nicht sehr gross*), in diesem Falle kann $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ in eine Reihe nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}g$ entwickelt werden.

Es ist

$$2g = 4.\tfrac{1}{2}g,\quad \sin g = 2\sin\tfrac{1}{2}g\cos\tfrac{1}{2}g = 2\sin\tfrac{1}{2}g\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}g^2}$$

$$\sin 2g = 2\sin g\cos g = 4\sin\tfrac{1}{2}g\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}g^2} - 8\sin\tfrac{1}{2}g^3\sqrt{1 - \sin\tfrac{1}{2}g^2}$$

Setzt man $\sin\frac{1}{2}g^2 = x$, so wird

$$\cos\tfrac{1}{2}g = (1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \ldots$$

Ferner ist

$$u = \sin u + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\sin u^3 + \tfrac{1}{5}\frac{1.3}{2.4}\sin u^5 + \tfrac{1}{7}\frac{1.3.5}{2.4.6}\sin u^7 + \tfrac{1}{9}\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin u^9 + \ldots$$

Wendet man diesen Ausdruck auf $\frac{1}{2}g$ an, so wird

$$2g = 4\sin\tfrac{1}{2}g + \tfrac{2}{3}\sin\tfrac{1}{2}g^3 + \tfrac{3}{10}\sin\tfrac{1}{2}g^5 + \tfrac{5}{28}\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \tfrac{35}{288}\sin\tfrac{1}{2}g^9 + \ldots$$

$$\sin 2g = 4\sin\tfrac{1}{2}g - 10\sin\tfrac{1}{2}g^3 + \tfrac{7}{2}\sin\tfrac{1}{2}g^5 + \tfrac{3}{4}\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}g^9 + \ldots$$

$$2g - \sin 2g = \tfrac{32}{3}\sin\tfrac{1}{2}g^3 - \tfrac{16}{5}\sin\tfrac{1}{2}g^5 - \tfrac{4}{7}\sin\tfrac{1}{2}g^7 - \tfrac{2}{9}\sin\tfrac{1}{2}g^9 - \ldots$$

$$\sin g^3 = 8\sin\tfrac{1}{2}g^3 - 12\sin\tfrac{1}{2}g^5 + 3\sin\tfrac{1}{2}g^7 + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}g^9 + \ldots$$

Bezeichnet man der Kürze halber $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ mit X, so wird

$$X = \frac{\tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{5}x - \tfrac{1}{14}x^2 - \tfrac{1}{36}x^3 - \ldots}{1 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \ldots}$$

Bezeichnet man den Zähler von X mit Z, den Nenner mit N, so wird $X = \frac{Z}{N} = \frac{1}{N:Z}$.

Entwickelt man $N : Z$ in eine Reihe nach Potenzen von x, so erhält man

*) Bis 30° ungefähr.

$$N:Z = \tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}x + \tfrac{9}{175}x^2 + \tfrac{26}{875}x^3 + \dots$$
$$= \tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi),$$

wo $\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{52}{1575}x^3 + ..$ gesetzt wurde. Es wird daher

$$X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von X in die Gleichung (7) und bedenkt man, dass, wenn g nicht gross ist, nur das obere Zeichen stattfindet; so erhält man

$$m = (l + x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l + x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Setzt man $\frac{m}{(l + x)^{\frac{1}{2}}} = y$, so wird $x = \frac{m^2}{y^2} - l$,

$$\tfrac{3}{4} - \tfrac{9}{10}(x - \xi) = \tfrac{9}{10}\left(\tfrac{5}{6} + l + \xi - \frac{m^2}{y^2}\right)$$

also

$$y = 1 + \frac{\frac{10}{9}m^2}{y^2\left(\frac{5}{6} + l + \xi - \frac{m^2}{y^2}\right)}$$
$$= 1 + \frac{\frac{10}{9}m^2}{\left(\frac{5}{6} + l + \xi\right)\left(y^2 - \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}\right)}$$

oder

$$y = 1 + \frac{\frac{10}{9}h}{y^2 - h}, \text{ wo } h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi} \text{ gesetzt wurde.}$$

Die Gleichung für y entwickelt, gibt

$$y^3 - y^2 - hy - \tfrac{1}{9}h = 0.$$

Diese Gleichung hat eine positive Wurzel. Die Auflösung der Gleichung (7) geschicht nun auf folgende Art. Für die erste Annäherung setze man $\xi = 0$, erhält damit $h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l}$ und damit y, aus y rechne man x. Dann rechne man ξ und erhält damit einen verbesserten Werth von h. Die Rechnung wird so oft wiederholt, bis man keine verschiedenen Werthe erhält.

Aus der Gleichung $y = 1 + \frac{m^2}{y^2\left(\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)\right)}$ folgt, dass, wenn die Zeit t als eine kleine Grösse erster Ordnung be-

trachtet wird, $y-1$ eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist.

Aus x erhält man g, ist g gefunden, so hat man nach Gleichung (5)

$$a = \frac{2(l+x)\cos f\sqrt{rr'}}{\sin g^2} = \frac{2m^2\cos f\sqrt{rr'}}{y^2\sin g^2} = \frac{k^2t^2}{4y^2rr'\cos f^2\sin g^2}$$

Aus $a\sqrt{1-e^2}\sin g = \sqrt{rr'}\sin f$, $\sqrt{p} = \sqrt{a(1-e^2)} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}}$ folgt

$$(8) \qquad \sqrt{p} = \frac{y\,rr'\sin 2f}{kt},$$

mithin $y = k\sqrt{p}\,t : rr'\sin 2f$, d. h. y ist das Verhältniss des elliptischen Sectors zwischen den beiden Radien Vectoren und dem durch dieselben bestimmten Dreiecke. Die Grössen m, $(l+x)^{\frac{1}{2}}$, $(l+x)^{\frac{3}{2}}X$ sind daher beziehungsweise der Sectorfläche (zwischen den Radien Vectoren und dem elliptischen Bogen), der Dreiecksfläche (zwischen den Radien Vectoren und der Chorde), der Segmentfläche (zwischen dem Bogen und der Chorde) proportional.

Ist p gefunden, so erhält man aus den Gleichungen für r und r'

$$e\cos v = \frac{p}{r} - 1$$

$$e\cos v' = \frac{p}{r'} - 1$$

Setzt man $v' = v + (v'-v) = v + 2f$, so wird

$$(9) \qquad e\sin v = (\frac{p}{r} - 1)\cot 2f - (\frac{p}{r'} - 1)\operatorname{cosec} 2f,$$

$$(10) \qquad e\cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

aus welchen Gleichungen e und v und damit auch v' erhalten werden.

Die mittleren Anomalien M und M' erhält man durch

$$(11) \qquad \tan \tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan \tfrac{1}{2}v$$

(12) $\operatorname{tang} \frac{1}{2}E' = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2}v'$

(13) $M = E - e \sin E$

(14) $M' = E' - e \sin E'$.

Die mittlere tägliche Bewegung μ wird erhalten aus

(15) $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{M' - M}{t}$.

Ist g gross, so lässt sich die Gleichung (7) oder (7*) sicher und leicht durch Versuche auflösen; sicher, weil $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ sich genau mittelst trigonometrischer Tafeln berechnen lässt; leicht, weil dieser Fall nur bei bereits näherungsweise bekannten Bahnen vorkommt, wo also ein Näherungswerth von g schon gegeben ist. In diesem Falle bestimmt man dann aus (5)oder(5*) die Grösse a, hierauf aus (1) die Grösse $\sqrt{1-e^2}$ und damit die Grösse p aus der Gleichung (8*) $\sqrt{p} = \sqrt{a(1-e^2)}$, die übrige Rechnung ist so wie in dem früheren Falle.

Beispiel. Es sei $\log r = 0.3307640$, $\log r' = 0.3222239$, $v' - v = 7^0\, 34'\, 53''.73$ $t = 21.93391$ Tage.

Es wird $l = 0.00112057$, $\log m^2 = 7.2736765$. Ein genäherter Werth von h ist daher $= 0.00225047$, damit $\log y^2 = 0.0021633$, woraus $x = 0.0007480179$ folgt. ξ ist in diesem Falle verschwindend.

$g = 3^0\, 8'\, 4''.0572$, $\log p = 0.3954837$, $\log e = 9.3897262$
$v = 310^0\, 55'\, 29''.64$, $v' = 318^0\, 30'\, 23''.37$, $E = 320^0\, 52'\, 15''.53$,
$E' = 327^0\, 8'\, 23''.65$, $M = 329^0\, 44'\, 27''.67$, $M' = 334^0\, 45'\, 58''.73$,
$\mu = 824''.7989$.

II. Für die Parabel. Aus $r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}v^2}$, $r' = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}v'^2}$

erhält man $\sqrt{\frac{1}{q}} \cos \frac{1}{2}v = \frac{1}{\sqrt{r}}$, $\sqrt{\frac{1}{q}} \cos \frac{1}{2}v' = \frac{1}{\sqrt{r'}}$

und daraus

$$(16)\qquad \sqrt{\frac{1}{q}}\sin\tfrac{1}{2}v = \frac{\cot f}{\sqrt{r}} - \frac{\operatorname{cosec} f}{\sqrt{r'}}$$

$$(17)\qquad \sqrt{\frac{1}{q}}\cos\tfrac{1}{2}v = \frac{1}{\sqrt{r}},$$

aus welchen Gleichungen q, v und v' erhalten werden. Aus

$$(18)\qquad \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}}\tau = 75 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v + 25 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3$$

$$(19)\qquad \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}}\tau' = 75 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' + 25 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v'^3$$

erhält man τ und τ', d. i. die Zeiten, welche seit dem Durchgange durch das Perihel verflossen sind; aus diesen und den Beobachtungszeiten erhält man die Zeit des Durchganges des Himmelskörpers durch das Perihel. Die Uebereinstimmung dieser beiden Zeiten dient als Controle der Rechnung.

7.

Für die Bestimmung einer parabolischen Bahn ist eine unter dem Namen der Lambert'schen Gleichung bekannte Formel von grosser Wichtigkeit.

Nach den Gleichungen (18) und (19) ist, wegen $\tau' - \tau = t$,

$$\frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = 75(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v) + 25(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v'^3 - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^3)$$

$$= 25(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v)(3 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^2 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v'^2)$$

Da $1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' = \frac{\cos f}{\cos\frac{1}{2}v \cos\frac{1}{2}v'}$, $1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v^2}$, $1 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v'^2 = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v'^2}$, $\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v' - \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}v = \frac{\sin f}{\cos\frac{1}{2}v \cos\frac{1}{2}v'}$ ist; so folgt

$$\frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{25 \sin f}{\cos\frac{1}{2}v \cos\frac{1}{2}v'}\left(\frac{\cos f}{\cos\frac{1}{2}v \cos\frac{1}{2}v'} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v^2} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}v'^2}\right)$$

Setzt man für C den Werth $\frac{75\,k}{\sqrt{2}}$, ferner aus $r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$, $r' = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v'^2}$ die Werthe $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v} = \sqrt{\frac{r}{q}}$, $\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v'} = \sqrt{\frac{r'}{q}}$, so

wird

$$\frac{kt}{\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{3\,q^2}\,(\cos f \sqrt{rr'} + r + r'). \tag{20}$$

Bedeutet ϱ die Sehne zwischen dem ersten und zweiten Orte, so ist

$$\varrho^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2$$

$$4rr' \cos f^2 = (r + r')^2 - \varrho^2 = (r + r' + \varrho)\,(r + r' - \varrho).$$

Setzt man $r + r' + \varrho = m^2,\quad r + r' - \varrho = n^2,$ so wird

$$\begin{aligned} r + r' &= \tfrac{1}{2}(m^2 + n^2) \\ 2 \cos f \sqrt{rr'} &= \pm\, m n \end{aligned} \tag{21}$$

wo das obere Zeichen stattfindet, wenn $\cos f$ positiv, das untere Zeichen, wenn $\cos f$ negativ ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} \sin f^2 = \sin \tfrac{1}{2}(v' - v)^2 &= (\sin \tfrac{1}{2} v' \cos \tfrac{1}{2} v - \cos \tfrac{1}{2} v' \sin \tfrac{1}{2} v)^2 \\ &= \cos \tfrac{1}{2} v^2 + \cos \tfrac{1}{2} v'^2 - 2 \cos \tfrac{1}{2}(v' - v) \cos \tfrac{1}{2} v \cos \tfrac{1}{2} v' \\ &= \frac{q}{r} + \frac{q}{r'} - \frac{2q \cos f}{\sqrt{rr'}} = q\,\frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'}}{rr'}, \end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (21)

$$2 \sin f \sqrt{rr'} = (m \mp n)\sqrt{q}. \tag{22}$$

Substituirt man die Werthe von $r + r'$, $\cos f \sqrt{rr'}$, $\sin f \sqrt{rr'}$ in die Gleichung (20), so erhält man

$$2kt = \tfrac{1}{3}(m^3 \mp n^3),$$

oder indem man statt m und n die Werthe setzt

$$6kt = (r + r' + \varrho)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - \varrho)^{\frac{3}{2}}, \tag{23}$$

welche Gleichung die **Lambert'sche Formel** heisst, wiewohl sie bereits von Euler angegeben wurde. Das obere Zeichen wird genommen, wenn $2f = v' - v$ kleiner als 180° ist, das untere, wenn $2f$ grösser als 180° ist. In der Regel findet nur der erste Fall statt.

8.

Es seien $r, v; r', v'; r'', v''$ drei Orte eines Himmelskörpers in der Bahn, so ist

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos v'$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e \cos v''.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\sin(v'-v'')$, $\sin(v''-v)$, $\sin(v-v')$ und addirt man, so wird zufolge der Formel II. des Art. 5.

$$\frac{p}{r}\sin(v'-v'') + \frac{p}{r'}\sin(v''-v) + \frac{p}{r''}\sin(v-v')$$
$$= \sin(v'-v'') + \sin(v''-v) + \sin(v-v').$$

Multiplicirt man mit $rr'r''$ und setzt Kürze halber

$$v'-v = 2f'', \quad v''-v = 2f', \quad v''-v' = 2f,$$
$$rr'\sin 2f'' = n'', \quad rr''\sin 2f' = n', \quad r'r''\sin 2f = n$$

so wird

$$p = \frac{4rr'r''\sin f\sin f'\sin f''}{n - n' + n''} \tag{24}$$

In diesem Ausdrucke sind $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n'$, $\frac{1}{2}n''$ die Flächen der Dreiecke resp. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vector. Der Nenner ist die doppelte Dreiecksfläche, welche durch die drei Orte des Himmelskörpers im Raume bestimmt ist. Aus diesem Ausdruck lässt sich eine Formel für $\frac{n+n''}{n'}$ ableiten, welche in der Folge von Wichtigkeit ist.

Sind nämlich t, t', t'' die Zwischenzeiten resp. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Orte, und setzt man

$$kt = \vartheta, \quad kt' = \vartheta', \quad kt'' = \vartheta''$$

so ist zufolge Gleichung (8) des Art. 6.

$$\sqrt{p} = \frac{y\,n}{\vartheta}, \quad \sqrt{p} = \frac{y''\,n''}{\vartheta''}, \text{ also}$$

$$p = \frac{y y''\, n n''}{\vartheta \vartheta''},$$

wo die Bedeutung von y und y'' klar ist. Durch Gleichstellung der Werthe von p erhält man

$$n - n' + n'' = \frac{4 r r' r'' \sin f \sin f' \sin f'' \,\vartheta \vartheta''}{y y''\, n n''}.$$

Da $n n'' = r' r'' \sin 2f \,.\, r r' \sin 2f''$

$= 4 r r'^2 r'' \sin f \cos f \sin f'' \cos f''$ ist, so wird

$$n - n' + n'' = \frac{\sin f' \,\vartheta \vartheta''}{y y'' r' \cos f \cos f''} = \frac{n' \,\vartheta \vartheta''}{2 y y'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

$$\frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 y y'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}. \tag{25}$$

Dritter Abschnitt.

Relationen, die einen einzelnen Ort im Raume betreffen.

9.

Um den Ort eines Himmelskörpers im Raume in Beziehung auf einen gegebenen Punct angeben zu können, ist die Kenntniss der Lage der Bahnebene gegen eine bekannte Ebene und der Apsidenlinie in der Bahnebene erforderlich. Denkt man sich um die Sonne als Mittelpunct eine Kugelfläche beschrieben, so werden sich auf dieser die Bahn des Himmelskörpers als ein grösster Kreis, die von der Sonne nach dem Himmelskörper gezogenen Geraden als Puncte darstellen. Wenn Ebenen und gerade Linie nicht durch die Sonne selbst hindurchgehen, so sollen dieselben durch parallel durch die Sonne gelegte Ebenen und Geraden ersetzt werden.

Die Ebene der Bahn eines Himmelskörpers schneidet im Allgemeinen die Ebene der Erdbahn oder Ecliptik, diese Durchschnittslinie heisst Knotenlinie; die Durch-

schnittspuncte der erwähnten Kugelfläche mit der Knotenlinie heissen Knoten, derjenige, wo der Planet von der südlichen Gegend in die nördliche Gegend der Ecliptik übergeht, heisst der aufsteigende, der andere der absteigende Knoten, in diesem geht der Himmelskörper von der nördlichen Gegend der Ecliptik in die südliche über. Die Lage der Knoten wird durch ihren nach der Ordnung der Zeichen gezählten Abstand von dem Frühlingsäquinoctium bezeichnet d. i. die Länge des Knotens. Es sei (Fig. 2) $\Upsilon ☊ E$ ein Theil der Ecliptik, $\Upsilon_0 ☊ P$ ein Theil der Bahn des Himmelskörpers, Υ der Frühlingspunct (die Richtung der Bewegung ist durch beigesetzte Pfeile bezeichnet). Der sphärische Winkel $E ☊ P$ stellt den Winkel der Bahn und Ecliptik vor, dieser Winkel heisst die Neigung der Bahn des Himmelskörpers gegen die Ecliptik oder einfach Neigung der Bahn, die Neigung wird von 0 bis 180^0 gezählt. Bezeichnet in der Figur ☊ den aufsteigenden Knoten, so stellt der Bogen $\Upsilon ☊$ die Länge des aufsteigenden Knotens dar.

Wird dieser Bogen in der Bahn von ☊ aus entgegengesetzt der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers abgetragen, so erhält man dadurch den Punct Υ_0, die von diesem Puncte in der Richtung der Bewegung gezählten Bogen werden Längen der Bahn genannt. Ist daher P das Perihel (eigentlich die Projection des Perihels), so heisst $\Upsilon_0 P$ die Länge des Perihels.

In Figur 2 ist daher

$$\Upsilon ☊ = ☊ = \text{Länge des aufsteigenden Knotens,}$$
$$\sphericalangle E ☊ P = i = \text{Neigung der Bahn,}$$
$$\Upsilon_0 P = \Pi = \text{Länge des Perihels.}$$

Ist L ein Ort des Himmelskörpers, v die wahre, M die mittlere Anomalie desselben, so heisst $\Pi + v$ die wahre,

$\Pi + M$ die **mittlere Länge** des Himmelskörpers in der Bahn. Die sieben Grössen: 1) mittlere Länge für einen bestimmten Zeitpunct, 2) mittlere Entfernung, 3) Excentricität, 4) Länge des Perihels, 5) Länge des aufsteigenden Knotens, 6) Neigung der Bahn, 7) Masse des Himmelskörpers heissen die **Elemente der Bewegung des Himmelskörpers**. Bei der Parabel vertritt die Zeit des Periheldurchganges die Stelle des ersten Elementes. Statt des Elementes in 2) wird die Distanz im Perihel genommen. Bei den Kometen und den kleinen Planeten setzt man die Masse immer gleich Null.

10.

Die Lage eines Punctes z. B. L an der Oberfläche der Kugel wird am einfachsten durch den Abstand desselben von der Ecliptik d. i. die **Breite**, und durch den Abstand des Fusspunctes des Perpendikels auf die Ecliptik von dem Frühlingspuncte d. i. die **Länge** bestimmt. Es sei also der Bogen LD senkrecht auf ΥE, so heisst $\Upsilon D = l$ die Länge, $DL = b$ die Breite des Punctes L. Die Breite wird von beiden Seiten der Ecliptik an bis 90^0 gezählt, oberhalb (d. i. in der nördlichen Region) der Ecliptik positiv, unterhalb negativ gezählt. Da die Sonne als Mittelpunct der Kugel angenommen wurde, so nennt man l und b **heliocentrische** Länge und Breite. Bezeichnet man den Bogen ΩL mit u, so heisst u das **Argument der Breite**, es ist $u = \Pi - \Omega + v$. Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ΩDL folgt:

(1) $$\operatorname{tang}(l - \Omega) = \cos i \operatorname{tang} u$$

(2) $$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} i \sin(l - \Omega)$$

(3) $$\sin b = \sin i \sin u$$

(4) $$\cos u = \cos b \cos(l - \Omega)$$

Aus den Formeln (1) und (4) folgt, dass für $i < 90^0$ die Grössen $l - \Omega$ und u, für $i > 90^0$ die Grössen $l - \Omega$ und $360^0 - u$ in demselben Quadranten liegen.

11.

Die Lage eines Punctes im Raume wird durch die Abstände desselben von drei sich einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen bestimmt. Es sei der Mittelpunct der Sonne der Coordinatenanfangspunct, die Ecliptik die xyEbene, die positive xAxe sei nach dem Frühlingspunct, die positive yAxe nach dem Puncte 90^0 Länge, die positive zAxe nach dem Nordpol der Ecliptik gerichtet. Sind daher l, b, r heliocentrische Länge, Breite und Distanz eines Punctes von der Sonne, x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten desselben auf das vorhin erwähnte Axensystem bezogen, so ist

$$(5) \qquad \begin{aligned} x &= r \cos b \cos l \\ y &= r \cos b \sin l \\ z &= r \sin b. \end{aligned}$$

Sind L, B, R die heliocentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunctes der Erde von der Sonne, X, Y, Z die rechtwinkligen Coordinaten, so ist

$$X = R \cos B \cos L, \quad Y = R \cos B \sin L, \quad Z = R \sin B.$$

Denkt man sich durch den Mittelpunct der Erde ein dem früheren Axensystem paralleles Axensystem gelegt, so sollen durch λ und β die geocentrische Länge und Breite, durch $\varDelta$ die Distanz des Punctes von dem Mittelpuncte der Erde bezeichnet werden. Sind ξ, η, ζ die rechtwinkligen geocentrischen Coordinaten dieses Punctes, so ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi &= \varDelta \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= \varDelta \cos \beta \sin \lambda \\ \zeta &= \varDelta \sin \beta, \end{aligned}$$

und es ist

$$x = X + \xi$$
$$y = Y + \eta$$
$$z = Z + \zeta.$$

Die Grösse $r \cos b$ ist die Projection der Distanz des Punctes von der Sonne auf die Ecliptik und heisst curtirte Distanz von der Sonne. Ebenso heisst $\Delta \cos \beta = \varrho$ curtirte Distanz des Punctes von der Erde.

Die Breite B der Erde ist nahe gleich Null und wird daher gewöhnlich vernachlässigt, unter dieser Voraussetzung erhält man für die heliocentrischen Coordinaten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \lambda + R \cos L \\ y &= \varrho \sin \lambda + R \sin L \\ z &= \varrho \operatorname{tang} \beta. \end{aligned} \tag{7}$$

12.

Die heliocentrischen Coordinaten lassen sich unmittelbar durch r und v ausdrücken. Setzt man in den Gleichungen (5) des Art. 11. $l = l - \Omega + \Omega$, so wird

$$x = r \cos b \cos (l - \Omega) \cos \Omega - r \cos b \sin (l - \Omega) \sin \Omega$$
$$y = r \cos b \sin (l - \Omega) \cos \Omega + r \cos b \cos (l - \Omega) \sin \Omega$$

und berücksichtiget man, dass nach den Gleichungen (1) bis (4)

$$\cos b \cos (l - \Omega) = \cos u$$
$$\cos b \sin (l - \Omega) = \sin u \cos i$$
$$\sin b = \sin u \sin i$$

so wird

$$x = r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i$$
$$y = r \sin u \cos \Omega \cos i + r \cos u \sin \Omega$$
$$z = r \sin u \sin i.$$

Setzt man

$$\cos \Omega = l \sin A$$
$$-\sin \Omega \cos i = l \cos A$$
$$\sin \Omega = m \sin B$$
$$\cos \Omega \cos i = m \cos B,$$

so wird

$$\begin{aligned} x &= lr \sin (A + u) \\ y &= mr \sin (B + u) \\ z &= \sin ir \sin u. \end{aligned} \tag{8}$$

Da $u = \Pi - \Omega + v$ ist, so sind x, y, z unmittelbar durch r und v ausgedrückt, wenn

$$\mathfrak{A} = \Pi - \Omega + A$$
$$\mathfrak{B} = \Pi - \Omega + B$$
$$\mathfrak{C} = \Pi - \Omega, \qquad \sin i = n \text{ gesetzt wird,}$$

es wird dann

$$\begin{aligned} x &= lr \sin (\mathfrak{A} + v) \\ y &= mr \sin (\mathfrak{B} + v) \\ z &= nr \sin (\mathfrak{C} + v). \end{aligned} \tag{9}$$

Vierter Abschnitt.

Relationen zwischen mehreren Orten im Raume.

13.

Aufgabe. Aus zwei heliocentrischen Orten l, b und l', b' im Raume, die Länge des aufsteigenden Knotens Ω, die Neigung der Bahn i und die Argumente der Breite u, u' zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$\tang b = \tang i \sin (l - \Omega)$$
$$\tang b' = \tang i \sin (l' - \Omega).$$

Setzt man $l' - \Omega = l - \Omega + l' - l$, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten Ω und i folgende Gleichungen:

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
\operatorname{tang} i \sin (l - \Omega) &= \operatorname{tang} b \\
\operatorname{tang} i \cos (l - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} b' - \operatorname{tang} b \cos (l' - l)}{\sin (l' - l)}
\end{aligned}
$$

Wachsen die heliocentrischen Längen mit der Zeit, so ist $i < 90^0$, im entgegengesetzten Falle ist $i > 90^0$.

Hat man Ω und i gefunden, so erhält man die Argumente der Breite nach den Formeln

$$
(2)\qquad \begin{aligned}
\operatorname{tang} u &= \frac{\operatorname{tang} (l - \Omega)}{\cos i} \\
\operatorname{tang} u' &= \frac{\operatorname{tang} (l' - \Omega)}{\cos i}.
\end{aligned}
$$

Ist $i < 90^0$ so liegen $l - \Omega$ und u in demselben Quadranten.
„ $i > 90^0$ „ $360^0 - u$ „

14.

Es seien $x, y, z;\ x', y', z';\ x'', y'', z''$ drei heliocentrische Orte eines Himmelskörpers im Raume, so ist nach (9) des Art. 12.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{r} &= l \sin (\mathfrak{A} + v) \\
\frac{x'}{r'} &= l \sin (\mathfrak{A} + v') \\
\frac{x''}{r''} &= l \sin (\mathfrak{A} + v'').
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit $\sin (v' - v'')$, $\sin (v'' - v)$, $\sin (v - v')$ und addirt man, so erhält man mit Berücksichtigung der Formel I. des Art. 5.

$$\frac{x}{r} \sin (v' - v'') + \frac{x'}{r'} \sin (v'' - v) + \frac{x''}{r''} \sin (v - v') = 0$$

oder

$$x r' r'' \sin (v'' - v') - x' r r'' \sin (v'' - v) + x'' r r' \sin (v' - v) = 0.$$

Da $r' r'' \sin (v'' - v') = n$, $r r'' \sin (v'' - v) = n'$, $r r' \sin (v' - v) = n''$ gesetzt wurde, so wird

$$nx - n'x' + n''x'' = 0, \text{ ebenso}$$
$$ny - n'y' + n''y'' = 0$$
$$nz - nz' + n''z'' = 0.$$

Drückt man die heliocentrischen Coordinaten durch die geocentrischen aus, so wird gemäss der Ausdrücke (7) des Art. 11.

$$n(\varrho \cos\lambda + R\cos L) - n'(\varrho'\cos\lambda' + R'\cos L') + n''(\varrho''\cos\lambda'' + R''\cos L'') = 0 \tag{3}$$

$$n(\varrho \sin\lambda + R\sin L) - n'(\varrho'\sin\lambda' + R'\sin L') + n''(\varrho''\sin\lambda'' + R''\sin L'') = 0 \tag{4}$$

$$n\varrho \operatorname{tang}\beta - n'\varrho' \operatorname{tang}\beta' + n''\varrho'' \operatorname{tang}\beta'' = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage für die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

Zweiter Theil.

Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen.

15.

Vernachlässiget man die Masse des Himmelskörpers, so sind bei einer elliptischen Bahn sechs Elemente zu bestimmen. Zu dieser Bestimmung müssen daher sechs von einander unabhängige Grössen, welche von den Elementen abhängen, gegeben sein. Diese gegebenen Grössen können nur von der Erde aus beobachtete Orte des Himmelskörpers sein, und da jede solche Ortsbestimmung zwei Daten, etwa Länge und Breite liefert, so wollen wir drei geocentrische Beobachtungen als gegeben betrachten. Diese Beobachtungen dürfen keine zu grosse heliocentrische Bewegung umfassen, indem sonst Voraussetzungen, zu welchen man bei einer ersten Bahnbestimmung genöthigt ist, nicht stattfinden. Wären ausser den geocentrischen Längen und Breiten noch die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde gegeben, so könnte man daraus die heliocentrischen Längen, Breiten und Entfernungen des Himmelskörpers rechnen, und damit nach Art. 13 Neigung, Knoten und

Argument der Breite, und nach Art. 6. die übrigen Elemente bestimmen. Wir versuchen daher zunächst die Bestimmung der Distanzen des Himmelskörpers von der Erde. Es bedeuten daher, wie früher

t, t', t'' die Zwischenzeiten zwischen resp. der zweiten und dritten, ersten und dritten, ersten und zweiten Beobachtung.

λ, λ', λ'' die drei geocentrischen Längen des Himmelkörpers,

β, β', β'' dessen Breiten,

ϱ, ϱ', ϱ'' dessen curtirte Entfernungen von der Erde,

L, L', L'' die heliocentrischen Längen der Erde,

R, R', R'' die Entfernungen der Erde von der Sonne.

Aus den Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14. folgt durch Elimination von ϱ und ϱ''

$$\begin{aligned}
& n\,R\ \ (\text{tang}\,\beta\,\sin(\lambda''-L) - \text{tang}\,\beta''\sin(\lambda-L)) \\
& - n'\,R'\,(\text{tang}\,\beta\,\sin(\lambda''-L') - \text{tang}\,\beta''\sin(\lambda-L')) \\
(1)\quad & + n''\,R''\,(\text{tang}\,\beta\,\sin(\lambda''-L'') - \text{tang}\,\beta''\sin(\lambda-L'')) \\
& - n'\,\varrho'\,(\text{tang}\,\beta\,\sin(\lambda''-\lambda') - \text{tang}\,\beta'\sin(\lambda''-\lambda) \\
& \qquad + \text{tang}\,\beta''\sin(\lambda'-\lambda)) = 0.
\end{aligned}$$

Es stellen (Fig. 3) A, A', A'' die drei heliocentrischen Orte der Erde auf der Himmelskugel, B, B', B'' die drei geocentrischen Orte des Himmelskörpers, C, C', C'' die heliocentrischen Orte desselben dar. Ist K der Durchschnittspunct des grössten Kreises durch die äussersten geocentrischen Orte des Himmelskörpers (d.i. durch die Puncte $B\,B''$) mit der Ecliptik, so werde die Länge dieses Punctes mit K, die Neigung des eben erwähnten grössten Kreises mit J bezeichnet. Dabei ist:

$$(2)\qquad \begin{aligned}
\text{tang}\,\beta\ \ &= \sin(\lambda\ \ - K)\,\text{tang}\,J \\
\text{tang}\,\beta'' &= \sin(\lambda'' - K)\,\text{tang}\,J,
\end{aligned}$$

wo tang J positiv genommen wird.

Mit Hülfe der Formel I Art. 5 geht daher die Gleichung (1) über in

$$(3)\quad \begin{aligned} & n\ R\ \sin(\lambda''-\lambda)\sin(L-K)\operatorname{tang} J\\ & -n'\ R'\ \sin(\lambda''-\lambda)\sin(L'-K)\operatorname{tang} J\\ & n''\ R''\ \sin(\lambda''-\lambda)\sin(L''-K)\operatorname{tang} J\\ & -n'\ \varrho'\ (\sin(\lambda''-\lambda)\sin(\lambda'-K)\operatorname{tang} J\\ & \quad -\operatorname{tang}\beta'\sin(\lambda''-\lambda))=0. \end{aligned}$$

Führt man die Hülfsgrösse β_0 ein durch die Gleichung

$$(4)\quad \operatorname{tang}\beta_0=\sin(\lambda'-K)\operatorname{tang} J,$$

so folgt aus der Gleichung (3)

$$(5)\quad \frac{n'\sin(\beta'-\beta_0)}{\cos\beta_0\operatorname{tang} J}\cdot\frac{\varrho'}{\cos\beta'}=-n\,R\sin(L-K)+n'R'\sin(L'-K)-n''R''\sin(L''-K).$$

Setzt man der Kürze halber

$$(6)\quad \frac{\sin(\beta'-\beta_0)}{\cos\beta_0\operatorname{tang} J}=a_0,\quad \frac{R\sin(L-K)}{a_0}=b,\quad \frac{R'\sin(L'-K)}{a_0}=c,\quad \frac{R''\sin(L''-K)}{a_0}=d$$

so wird aus (5)

$$(7)\quad \frac{\varrho'}{\cos\beta'}=c-\frac{bn+dn''}{n'}.$$

Die Grösse β_0 ist vermöge der Gleichung (4) die Breite des Durchschnittspunctes B_0 des Breitenkreises $B'\,D$ des zweiten Punctes B' mit dem erwähnten grössten Kreise durch die beiden Puncte B und B''.

Die Grösse $\beta'-\beta_0$, in der Figur 3 durch den Bogen B_0B' versinnlicht, hängt von der Krümmung des geocentrischen Weges $BB'B''$ ab, ist daher im Allgemeinen eine kleine Grösse zweiter Ordnung, wenn die Linie $B\,B'\,B''$ eine kleine Grösse der ersten Ordnung ist. Aus den Ausdrücken für a_0, b, c, d ersieht man, dass b und d kleine Grössen der -2ten das ist grosse Grössen der zweiten Ordnung sind. Nun ist $\frac{n}{n'}=\frac{\vartheta}{\vartheta'}\cdot\frac{y'}{y}$, $\frac{n''}{n'}=\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\cdot\frac{y'}{y''}$.

Die Grössen y, y', y'' also auch die Grössen $\frac{y'}{y}, \frac{y'}{y''}$ weichen von der Einheit um kleine Grössen der zweiten Ordnung ab, wenn man die Zwischenzeiten als kleine Grössen der ersten Ordnung betrachtet. Würde man daher in der Gleichung (7) statt $\frac{n}{n'}, \frac{n''}{n'}$ die Näherungswerthe $\frac{\vartheta}{\vartheta'}, \frac{\vartheta''}{\vartheta'}$ setzen; so würde, wegen der grossen Factoren b und d, die Grösse ϱ' im Allgemeinen mit einem endlichen Fehler behaftet erhalten werden. Schreibt man aber die Gleichung (7) in folgender Form

$$\frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{bn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'},$$

so wird der Fehler in dem Factor $\frac{bn + dn''}{n + n''}$, wenn statt $\frac{n}{n''}$ das Verhältniss $\frac{\vartheta}{\vartheta''}$ gesetzt wird, im Allgemeinen nur von der ersten Ordnung; denn es ist

$$\varDelta = \frac{bn + dn''}{n + n''} - \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''} = \frac{(b - d)\,\vartheta\,\vartheta''\,(y'' - y)}{(\vartheta + \vartheta'')\,(y''\vartheta + y\vartheta'')}.$$

Nun ist $d - b$ von der Ordnung $\frac{R \sin (L'' - L)}{a_0}$ d. i. von der Ordnung -1, $\vartheta\vartheta''$ von der Ordnung $+2$, $y'' - y$ von der Ordnung $+2$ also der Zähler der Differenz $\varDelta$ eine kleine Grösse der dritten Ordnung. Der Nenner von $\varDelta$ ist eine kleine Grösse zweiter Ordnung, also die Differenz $\varDelta$ im Allgemeinen von der ersten Ordnung. Der Factor $\frac{n + n''}{n'}$ wurde im Art. 8. Gleichung (25) gefunden

$$\frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''yy''\cos f \cos f' \cos f''}.$$

Da die Cosinusse der Winkel f, f', f'' von der Einheit ebenfalls nur um Grössen zweiter Ordnung abweichen, so ist auf einen Fehler vierter Ordnung genau $\frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}$.

Die Grössen $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ weichen von der Einheit blos um Grössen der ersten Ordnung ab, betrachtet man die Excentricität der Bahn als eine kleine Grösse erster Ordnung, so werden $\frac{r}{r'}$, $\frac{r}{r''}$ von der Einheit blos um kleine Grössen zweiter Ordnung verschieden sein.

Setzt man daher statt $\frac{\vartheta\,\vartheta''}{r r' r''}$ die Grösse $\frac{\vartheta\,\vartheta''}{r'^3}$, so wird der Fehler von $\frac{n + n''}{n'}$ nahe von der vierten Ordnung sein. Setzt man daher

$$\frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''}\left(1 + \frac{\vartheta\,\vartheta''}{2r'^3}\right),$$

so wird der Fehler in ϱ' im Allgemeinen nur eine kleine Grösse der ersten Ordnung sein. Setzt man die genauen Werthe von $\frac{n''}{n} = P$, $\frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3}$, so wird in aller Strenge

$$(8) \qquad P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{y}{y''}, \quad Q = \frac{\vartheta\,\vartheta''\,r'^2}{y y'' r r'' \cos f \cos f' \cos f''},$$

$$(9) \qquad \frac{\varrho'}{\cos\beta'} = c - \frac{b + dP}{1 + P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right).$$

Nimmt man in der Gleichung (9) für P und Q die Näherungswerthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$, so wird die Grösse ϱ' im Allgemeinen mit einem Fehler erster Ordnung behaftet sein.

Aus dem Dreiecke zwischen der Sonne, der Erde und dem Himmelskörper in der zweiten Beobachtung folgt, wenn man den Bogen $A'B'$ mit δ' bezeichnet (Fig. 4),

$$r'^2 = R'^2 + 2R' \frac{\varrho'}{\cos\beta'} \cos\delta' + \frac{\varrho'^2}{\cos\beta'^2},$$

wo $\cos\delta' = \cos\beta' \cos(\lambda' - L')$ ist, oder

$$r'^2 = R'^2 \sin\delta'^2 + \left(R'\cos\delta' + \frac{\varrho'}{\cos\beta'}\right)^2.$$

Setzt man $R'\sin\delta' = a'$, $R'\cos\delta' + \frac{\varrho'}{\cos\beta'} = x'$, so wird

(10) $r'^2 = a'^2 + x'^2, \quad \frac{\varrho'}{\cos\beta'} = x' - R'\cos\delta',$

und die Gleichung (9) geht über in

$$x' = R'\cos\delta' + c - \frac{b+dP}{1+P} - \frac{b+dP}{1+P}\cdot\frac{Q}{2(a'^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder, wenn

$$R'\cos\delta' + c = e, \quad e - \frac{b+dP}{1+P} = \lambda, \quad -\frac{b+dP}{1+P}\cdot\frac{Q}{2} = \mu$$

gesetzt wird, in

(11) $$x' = \lambda + \frac{\mu}{(a'^2+x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um r' d. i. $\sqrt{a'^2+x'^2}$ bequem zu berechnen, setze man $\tang z' = \frac{a'}{x'}$, so wird

$$\sqrt{a'^2+x'^2} = r' = \frac{a'}{\sin z'} = \frac{x'}{\cos z'},$$

dabei bedeutet z' den Bogen $C'B'$.

Aus der Gleichung (11) wird die Unbekannte x' durch Versuche bestimmt, in der Regel wird $x' = \lambda$ ein Näherungswerth für x' sein.

Ist x' gefunden, so erhält man daraus r' und ϱ'. Dann erhält man aus

$$n'' = nP, \quad \frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3},$$

(12) $$\frac{n}{n'} = \left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right)\frac{1}{1+P}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{n}{n'}P.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (3) und (4) des Art. 14. die Grösse ϱ'', so erhält man

(13) $$\varrho = \frac{\sin(\lambda''-\lambda')}{\sin(\lambda''-\lambda)}\frac{n'}{n}\varrho'$$
$$-\frac{nR\sin(\lambda''-L) - n'R'\sin(\lambda''-L') + n''R''\sin(\lambda''-L'')}{n\sin(\lambda''-\lambda)};$$

eliminirt man aber aus denselben Gleichungen die Grösse ϱ, so wird

(14) $$\varrho'' = \frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\sin(\lambda''-\lambda)}\frac{n'}{n''}\varrho'$$

$$+\frac{nR\sin(\lambda-L)-n'R'\sin(\lambda-L')+n''R''\sin(\lambda-L'')}{n''\sin(\lambda''-\lambda)}$$

Aus den Gleichungen (13) und (14) erhält man ϱ und ϱ''. Ist ϱ, ϱ', ϱ'' gefunden, so rechne man nach den Formeln

$$\begin{aligned} r\cos b\cos l &= \varrho\cos\lambda + R\cos L \\ r\cos b\sin l &= \varrho\sin\lambda + R\sin L \\ r\sin b &= \varrho\tang\beta, \end{aligned} \tag{15}$$

und den analogen Formeln für den zweiten und dritten Ort, die heliocentrischen Längen, Breiten und Radien Vectoren des Himmelskörpers. Aus diesen Grössen kann man die Elemente nach Art. 13. und Art. 6. rechnen.

16.

Wie man ersieht, setzt diese Methode voraus, dass die Werthe von P und Q bekannt sind. Allein diese Grössen sind unbekannt, aber man kann dafür als erste Hypothese die Näherungswerthe $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta\vartheta''$ setzen, und mit diesen Werthen führe man die Rechnung, jedoch nicht bis zum Schlusse, durch; sondern hat man die Grössen r, r', r'' und u, u', u'' ermittelt, so rechne man aus

r, r'; $u'-u = v'-v = 2f''$ und ϑ'' die Grösse y''
r', r''; $u''-u' = v''-v' = 2f$ „ ϑ „ „ y,

und damit neue Werthe von P und Q nach den Formeln

$$P=\frac{\vartheta''}{\vartheta}\cdot\frac{y}{y''},\quad Q=\frac{r'^2\vartheta\vartheta''}{rr''yy''\cos f\cos f'\cos f''}.$$

Mit diesen Werthen von P und Q wird die Rechnung wiederholt, diese Wiederholung geschieht so oft, bis man Werthe von P und Q bekommt, welche von den früheren gar nicht oder nur sehr wenig verschieden sind.

In dieser Hypothese, als letzten, führe man die Rechnung mit den Grössen r, r', $v'-v$, ϑ'', y'' und den Grössen

$r', r'', v'' - v', \vartheta, y$ zu Ende. Die Uebereinstimmung dient als Controle. Sicherer verfährt man, namentlich bei ersten Bahnbestimmungen, wo die heliocentrische Bewegung in der Regel gering ist, wenn man in der letzten Hypothese aus den Grössen l, l''; b, b''; r, r''; $v'' - v$, ϑ' die Elemente der Bahn rechnet. Als Controle der Rechnung berechne man den mittleren Ort aus den erhaltenen Elementen.

17.

Bei diesen verschiedenen Hypothesen für die Grössen P und Q ist es vortheilhaft, so viele Rechnungen als möglich von den Hypothesen unabhängig zu machen und auf unmittelbar gegebene Grössen zurückzuführen. Die Grössen K, $\tan J$, a_0, b, c, d, e, a' ... hängen nur von den gegebenen Beobachtungsdaten ab, werden daher nur einmal gerechnet. Ebenso können die Gleichungen (13) und (14) so transformirt werden, dass die Berechnung den Grössen ϱ und ϱ'' in den verschiedenen Hypothesen bequemer ist.

Es ist nach (5) und (6) Art. 15.

$$nR\sin(L-K) - n'R'\sin(L'-K) + n''R''\sin(L''-K) = -a_0\frac{n'\varrho'}{\cos\beta'}$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung die Grösse n'', und setzt deren Werth in den Zähler von ϱ (Gleichung (13), Art. 15.), so wird derselbe

$$-\frac{a_0 \sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)} \cdot \frac{n'\varrho'}{\cos\beta'}$$

$$+\frac{nR}{\sin(L''-K)}(\sin(\lambda''-L)\sin(L''-K) - \sin(\lambda''-L'')\sin(L-K))$$

$$-\frac{n'R'}{\sin(L''-K)}(\sin(\lambda''-L')\sin(L''-K) - \sin(\lambda''-L'')\sin(L'-K)),$$

oder durch Anwendung des Hülfssatzes I. Art. 5.

$$-\frac{a_0 n'\varrho'}{\cos\beta'} \cdot \frac{\sin(\lambda''-L'')}{\sin(L''-K)} + \frac{nR}{\sin(L''-K)} \cdot \sin(L''-L)\sin(\lambda''-K)$$

$$-\frac{n'R'}{\sin(L''-K)} \cdot \sin(L''-L')\sin(\lambda''-K),$$

oder

$$-\frac{a_0 n' \varrho'}{\cos\beta'}\cdot\frac{\sin(\lambda''-L'')}{\sin(L''-K)}+\frac{\sin(\lambda''-K)}{\sin(L''-K)}(nR\sin(L''-L)-n'R'\sin(L''-L')).$$

Setzt man

$RR'\sin(L'-L)=N''$, $R'R''\sin(L''-L')=N$, $RR''\sin(L''-L)=N'$;

so wird der Zähler von ϱ

$$-\frac{a_0 n' \varrho'}{\cos\beta'}\cdot\frac{\sin(\lambda''-L'')}{\sin(L''-K)}+\frac{\sin(\lambda''-K)}{\sin(L''-K)}\, nR\,\sin\,(L''-L)\left(1-\frac{n'}{n}\,\frac{N}{N'}\right).$$

Es wird daher

$$(13^*)\quad \varrho=\left(\frac{\sin(\lambda''-\lambda')}{\sin(\lambda''-\lambda)}+\frac{a_0\sec\beta'}{\sin(\lambda''-\lambda)}\cdot\frac{\sin(\lambda''-L'')}{\sin(L''-K)}\right)\cdot\frac{\varrho'}{(n:n')}$$
$$+R\,\frac{\sin(L''-L)}{\sin(\lambda''-\lambda)}\cdot\frac{\sin(\lambda''-K)}{\sin(L''-K)}\left(\frac{N:N'}{n:n'}-1\right).$$

und ebenso, indem man den ersten Ort mit dem dritten vertauscht:

$$(14^*)\qquad \varrho''=\left(\frac{\sin(\lambda'-\lambda)}{\sin(\lambda''-\lambda)}-\frac{a_0\sec\beta'}{\sin(\lambda''-\lambda)}\cdot\frac{\sin(\lambda-L)}{\sin(L-K)}\right)\cdot\frac{\varrho'}{(n'':n')}$$
$$+R''\,\frac{\sin(L''-L)}{\sin(\lambda''-\lambda)}\cdot\frac{\sin(\lambda-K)}{\sin(L-K)}\left(\frac{N'':N'}{n'':n'}-1\right).$$

Die Coefficienten von $\frac{\varrho'}{n:n'}$, $\frac{\varrho'}{n'':n'}$, $\left(\frac{N:N'}{n:n'}-1\right)$ und $\left(\frac{N'':N'}{n'':n'}-1\right)$ sind von jeder Hypothese für P und Q unabhängig, und lassen sich ein für allemal berechnen.

18.

Zur Erläuterung dieser Methode soll folgendes von Gauss gegebene Beispiel dienen. Für den Planeten Juno sind folgende Beobachtungen und zugehörige Erdorte gegeben:

Beobachtungszeiten auf den Pariser Meridian reducirt.	1804 Oct. 5.458644
	17.421885
	27.393077

$$\lambda = 354^0\ 44'\ 31''.60 \qquad \beta = -\ 4^0\ 59'\ 31''.06$$
$$\lambda' = 352^0\ 34'\ 22''.12 \qquad \beta' = -\ 6^0\ 21'\ 55''.07$$
$$\lambda'' = 351^0\ 34'\ 30''.01 \qquad \beta'' = -\ 7^0\ 17'\ 50''.95$$
$$L = 12^0\ 28'\ 27''.76 \qquad \log R = 9.9996826$$
$$L' = 24^0\ 19'\ 49''.05 \qquad \log R' = 9.9980979$$
$$L'' = 34^0\ 16'\ \ 9''.65 \qquad \log R'' = 9.9969678,$$

welche Grössen auf das mittlere Frühlings-Aequinox 1805.0 bezogen sind. Damit erhält man

$$\log \operatorname{tang} J = 9.8718259, \qquad K = 1^0\ 28'\ 49''.34$$
$$\beta_0 = -\ 6^0\ 34'\ 31''.394$$
$$\log a_0 = 7.6953221$$
$$b = 38.43487$$
$$c = 77.976545$$
$$\log d = 2.0352814$$
$$R' \cos \delta' = 0.8413488$$
$$e = 78.817894$$
$$\log a' = 9.7262084$$

Setzt man

$$\varrho = A \varrho' \frac{n'}{n} + B\left(\frac{N}{N'} \cdot \frac{n'}{n} - 1\right)$$
$$\varrho'' = A'' \varrho' \frac{n'}{n''} + B''\left(\frac{N''}{N'} \cdot \frac{n'}{n''} - 1\right)$$

so wird

$$\log A = 9.6317132 \qquad \log B = 0.3290193$$
$$\log A'' = 9.7331305 \qquad \log B'' = 0.6134162$$
$$\log N : N' = 9.6657486 \qquad \log N'' : N' = 9.7441299$$
$$\log \vartheta = 9.2343285 \qquad \log \vartheta'' = 9.3134303.$$

Alle diese Zahlen sind von den verschiedenen Hypothesen für P und Q unabhängig.

In erster Hypothese setze man:

$$\log P = 0.0791018, \qquad \log Q = 8.5477588$$

damit erhält man

$$\lambda = 2.189052$$
$$\log \mu = n\, 0.1311211.$$

Nun löse man die Gleichung

$$x' = \lambda + \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nach x' auf. Für die kleinen Planeten liegt $r' = \sqrt{a'^2 + x'^2}$ ungefähr zwischen 2 und 3. Ein Mittelwerth von r'^3 ist 17. Man setze nun $3 \log r' = 1.00$ und $3 \log r' = 1.30$; damit erhält man $x' = 2.054$ und $x' = 2.121$.

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so erhält man -0.0066 und -0.0613 als Fehler, und damit nach der *regula falsi* $x' = 2.0459$ als genaueren Werth, aus welchem $x' = 2.045902$ als definitiver Werth von x' erhalten wird. Nun wird

$$\log \varrho' = 0.0781403, \qquad \log r' = 0.3251111$$
$$\log \varrho = 0.0651853, \qquad \log \varrho'' = 0.0961795$$
$$l = 2^0\, 56'\, 7''.96$$
$$l' = 6^0\, 57'\, 15''.19$$
$$l'' = 10^0\, 22'\, 37''.72$$

$$\log \operatorname{tang} b = n\, 8.6769275 \qquad \log r = 0.3299972$$
$$\log \operatorname{tang} b' = n\, 8.8013853 \qquad \log r' = 0.3251113$$
$$\log \operatorname{tang} b'' = n\, 8.8835959 \qquad \log r'' = 0.3212583.$$

Aus l, l'', tang b, tang b'' erhält man

$$\Omega = 171^0\, 5'\, 46''.47$$
$$i = 13^0\, 2'\, 31''.68$$

und damit $\log \operatorname{tang} b' = n\, 8.8013852$. Die Uebereinstimmung der beiden Werthe von $\log r'$ und $\log \operatorname{tang} b'$ dient als Controle.

Nun erhält man $u = 192^0\, 8'\, 36''.96$ und

$$u' - u = 2f'' = 4^0\, 6'\, 44''.53$$
$$u'' - u' = 2f = 3^0\, 29'\, 47''.09$$
$$u'' - u = 2f' = 7^0\, 36'\, 31''.62.$$

Aus r, r', f'' und ϑ'' erhält man $\log y'' = 0.0003191$.
Aus r', r'', f und ϑ erhält man $\log y = 0.0002285$.

Damit erhält man folgende Werthe von P und Q:

$$\log P = 0.0790112 \qquad \log Q = 8.5476184;$$

dabei weicht $\log P$ von dem früheren um 906, $\log Q$ um 1404 Einheiten der siebenten Decimale ab. Mit diesen neuen Werthen von P und Q wiederhole man die Rechnung.

Es wird

$$\lambda = 2.192683, \qquad \log \mu = n\, 0.1309601$$

und damit

$$x' = 2.050484, \qquad \log r' = 0.3260214$$

$$\log \varrho' = 0.0797892$$

$$\log \varrho = 0.0666582, \qquad \log \varrho'' = 0.0979442$$

$$l = 2^0\, 55'\, 13''.71$$

$$l' = 6^0\, 55'\, 24''.83$$

$$l'' = 10^0\, 19'\, 56''.40$$

$$\log \operatorname{tang} b = n\, 8.6776066, \qquad \log r = 0.3307925$$

$$\log \operatorname{tang} b' = n\, 8.8021271, \qquad \log r' = 0.3260214$$

$$\log \operatorname{tang} b'' = n\, 8.8843618, \qquad \log r'' = 0.3222617$$

Aus l, l'', tang b, tang b'' erhält man

$$\Omega = 171^0\, 7'\, 53''.84$$

$$i = 13^0\, 6'\, 54''.20$$

und damit $\log \operatorname{tang} b' = 8.8021268$ als Controle. Ferner wird $u = 192^0\, 5'\, 43''.45$ und

$$u' - u = 2f'' = 4^0\, 5'\, 51''.31$$

$$u'' - u' = 2f = 3^0\, 28'\, 58''.56$$

$$u'' - u = 2f' = 7^0\, 34'\, 49''.87$$

$$\log y = 0.0002270, \qquad \log y'' = 0.0003172.$$

Damit erhält man folgende neue Werthe von P und Q

$$\log P = 0.0790116, \qquad \log Q = 8.5476326,$$

welche von den vorigen resp. um 4 und 142 Einheiten der siebenten Decimale abweichen. Diese Unterschiede sind so

klein, dass eine nochmalige Wiederholung der Rechnung nicht mehr nöthig ist. Der grössere Unterschied in log ϱ hat, da ϱ nur eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist, auf die Rechnung keinen Einfluss. Wegen der Kleinheit der heliocentrischen Bewegung rechne man aus r, r'', $u''-u$ und ϑ' die Elemente in der Bahn. Man erhält nun

$$\begin{aligned}
\log \vartheta' &= 9.5767077 \\
\log y' &= 0.0010815 \\
\log p &= 0.3954732 \\
\log e &= 9.3893483 \\
v &= 310^0\ 56'\ 9''.39 \\
\log a &= 0.4223802 \\
E &= 320^0\ 52'\ 19''.16 \\
E'' &= 327^0\ \ 8'\ 27''.64 \\
M &= 329^0\ 44'\ \ 2''.84 \\
M'' &= 334^0\ 45'\ 38''.02 \\
M''-M &= 18095''.18.
\end{aligned}$$

Die mittlere tägliche Bewegung ist $= 824''.9663$, also in der Zeit t' beträgt die mittlere Bewegung 18095″.17.

Statt der Excentricität e führt Gauss den spitzen Winkel φ ein, wo $\sin\varphi = e$ ist. Für dieses Beispiel ist

$$\varphi = 14^0\ 11'\ 16''.47.$$

Aus p und φ erhält man a sehr bequem nach der Formel $a = p : \cos\varphi^2$. Aus u und v erhält man

$$u - v = \Pi - \Omega = 241^0\ 9'\ 34''.06.$$

Zur Controle rechne man aus den erhaltenen Elementen den mittleren Ort. Die mittlere Bewegung zwischen der ersten und zweiten Beobachtung beträgt $\mu t'' = 9869''.27 = 2^0\ 44'\ 29''.27$, damit erhält man

$$\begin{aligned}
M' &= 332^0\ 28'\ 32''.11 \\
E' &= 324^0\ 16'\ 33''.30 \\
v' &= 315^0\ \ 2'\ \ 0''.76
\end{aligned}$$

$$\log r' = 0.3260215$$
$$\lambda' = 352^0\ 34'\ 22''.22$$
$$\beta' = -\ 6^0\ 21'\ 55''.08$$
$$\log \varrho' = 0.0797895.$$

Der Fehler in λ' beträgt 0''.10, der Fehler in β' beträgt 0''.01. Man sieht, wie genau in diesem Beispiele die zweite Hypothese für P und Q die Beobachtungen darstellt. Bei grösseren Zwischenzeiten, etwa von hundert Tagen, werden selbst bei einer völlig unbekannten Bahn nur drei oder höchstens vier Hypothesen erforderlich sein. In diesem Falle besitzt man aber in der Regel bereits genäherte Elemente, aus welchen man sich die erste Hypothese für P und Q ableitet.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmungen einer parabolischen Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen nach der Methode von Olbers.

19.

Eliminirt man aus den Gleichungen (3), (4) und (5) des Art. 14. die Grössen $n'\varrho'$ und $n'R'$, so erhält man folgende Gleichung

$$\begin{aligned} & n\varrho\,(\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda - L') - \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda' - L')) \\ & + n''\varrho''(\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L') - \operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L')) \\ & - nR\operatorname{tang}\beta' \sin(L' - L) + n''R'' \operatorname{tang}\beta' \sin(L'' - L') = 0, \end{aligned}$$

oder indem man das Verhältniss $\varrho'' : \varrho$ bestimmt,

$$(1)\qquad \frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{n}{n''} \cdot \frac{\operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda - L') - \operatorname{tang}\beta \sin(\lambda' - L')}{\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L')} + \frac{(-nR\sin(L' - L) + n''R''\sin(L'' - L'))\operatorname{tang}\beta'}{(\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L'))\,n''\varrho}.$$

Das zweite Glied des Verhältnisses $\frac{\varrho''}{\varrho}$ ist auch

$$= \frac{\operatorname{tang}\beta'\, R \sin(L' - L)}{\varrho(\operatorname{tang}\beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang}\beta' \sin(\lambda'' - L'))}\left(\frac{R''\sin(L'' - L')}{R\sin(L' - L)} - \frac{n}{n''}\right).$$

Nun ist

$$\frac{R'' \sin(L''-L')}{R \sin(L'-L)} = \frac{R' R'' \sin(L''-L')}{R R' \sin(L'-L)} = \frac{N}{N''}.$$

Die Verhältnisse $\frac{N}{N''}$, $\frac{n}{n''}$ weichen von den Verhältnissen $\frac{t}{t''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$ der Zwischenzeiten nur um Grössen der zweiten Ordnung ab. Der Factor $\left(\frac{N}{N''} - \frac{n}{n''}\right)$ des zweiten Gliedes von $\frac{\varrho''}{\varrho}$ ist daher von der zweiten Ordnung; der Zähler des ersten Factors d. i. die Grösse $\operatorname{tang} \beta' \, R \sin(L'-L')$ ist eine kleine Grösse erster Ordnung, der Nenner $\varrho\,(\operatorname{tang} \beta'' \sin(\lambda'-L') - \operatorname{tang} \beta' \sin(\lambda''-L'))$ ebenfalls von der ersten Ordnung, wie man sich durch Einführung der Hülfsgrössen tang J und K leicht überzeugt.

Es ist daher das zweite Glied des Verhältnisses $\frac{\varrho''}{\varrho}$ in der Gleichung (1) eine kleine Grösse der zweiten Ordnung. Vernachlässigt man daher dieses Glied, und setzt im ersten Gliede statt $\frac{n}{n''}$ die Grösse $\frac{t}{t''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$; so erhält man, bis auf einen Fehler zweiter Ordnung genau,

$$(2) \qquad \frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{t}{t''} \cdot \frac{\operatorname{tang} \beta' \sin(\lambda - L') - \operatorname{tang} \beta \sin(\lambda' - L')}{\operatorname{tang} \beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang} \beta' \sin(\lambda'' - L')},$$

oder (3) $\varrho'' = M\varrho$, wo die Bedeutung von M klar ist.

Nun ist $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, oder

$$r^2 = (\varrho \cos\lambda + R\cos L)^2 + (\varrho \sin\lambda + R \sin L)^2 + \varrho^2 \operatorname{tang} \beta^2,$$

oder

$$(4) \qquad r^2 = R^2 + 2R\cos(\lambda - L)\varrho + \sec \beta^2 \varrho^2;$$

ebenso

$$(5) \quad r''^2 = R''^2 + 2R'' \cos(\lambda'' - L'') M\varrho + \sec \beta''^2 M^2 \varrho^2.$$

Bedeutet s die Sehne zwischen dem ersten und dritten Orte des Himmelskörpers, so ist

$$s^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2$$
$$= x''^2 + y''^2 + z''^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx'' + yy'' + zz'')$$
$$= r^2 + r''^2 - 2(xx'' + yy'' + zz'').$$

Setzt man statt x, y, z; x'', y'', z'' ihre Werthe durch die geocentrischen Coordinaten ausgedrückt, so erhält man

$$(6)\quad s^2 = r^2 + r''^2 - 2RR''\cos(L''-L) - 2(RM\cos(\lambda''-L) + R''\cos(\lambda - L''))\varrho - 2(\cos(\lambda''-\lambda) + \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\beta'')M\varrho^2.$$

Ist t' die Zwischenzeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung, so folgt nach der Lambert'schen Formel

$$(7)\qquad 6kt' = (r + r'' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r'' - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Denkt man sich aus den Gleichungen (4), (5), (6) die Werthe von r, r'', s in die Lambert'sche Gleichung (7) gesetzt, so geht diese in eine Gleichung über, welche blos die Unbekannte ϱ enthält. Aus dieser Gleichung hat man daher diese Unbekannte zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht am einfachsten durch Versuche. Man nimmt für ϱ einen Werth an, rechnet damit nach (4), (5), (6) die Grössen r, r'', s und sieht, ob der Lambert'schen Formel (7) genügt wird. Man ändert nun ϱ so lange, bis die Gleichung (7) erfüllt wird. Aus zwei Annahmen für ϱ, welche bereits der Wahrheit ziemlich nahe kommen, erhält man durch die *regula falsi* einen genauen Werth von ϱ. Aus ϱ erhält man $\varrho'' = M\varrho$.

Mit den Grössen ϱ, ϱ'' der geocentrischen Längen und Breiten rechne man r, l, b; r'', l'', b'' und hierauf nach Art. 13. und Art. 6. die Bahnelemente.

Mit den gefundenen Elementen rechne man den Ort des Himmelskörpers zur Zeit der mittleren Beobachtung. Stimmt dieser mit dem beobachteten, so ist die Rechnung beendet; weicht aber der berechnete Ort von dem beobachteten um mehr als die möglichen Beobachtungsfehler ab,

so verändere man die Grösse M so lange, bis die Darstellung des mittleren Ortes innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler gelingt.

20.

Wie man ersieht, besteht der Nerv der Olbers'schen Methode, welche ausschliesslich bei Kometenbahnen angewendet wird, in der Bestimmung des Verhältnisss $\varrho'' : \varrho$ nnd in der Anwendung der Lambert'schen Formel. Für das Verhältniss $\varrho'' : \varrho$ wurde die Annahme gemacht, dass man für $n'' : n$ und $N'' : N$ das Verhältniss der Zwischenzeiten setzen könne, diese Annahme ist identisch mit der Voraussetznng, dass die Sehne der Kometen und Erdbahn von den mittleren Radien Vectoren in dem Verhältnisse der Zeiten geschnitten werde, wie man aus $n'' : n = r \sin(v' - v) : r'' \sin(v'' - v)$ und $N'' : N = R \sin(L' - L) : R'' \sin(L'' - L')$ ersieht. Für die Kometenbahn haben bereits Euler und Lambert diese Voraussetzung gemacht. Olbers dehnte diese Voraussetzung auch auf die Erdbahn aus uud erhielt dadurch diese höchst einfache Methode der Berechnung einer Kometenbahn.

21.

Zur Erläuterung dieser Methode soll ein von Gauss gegebenes Beispiel dienen. Für den zweiten Kometen vom Jahre 1813 hat man folgende Angaben.

Mittlere Göttinger Zeit.	Länge.	Breite.
1813 April 7.55002	$\lambda = 271^0\ 16'\ 38''$	$\beta = +\ 29^0\ 2'\ 0''$
14.54694	$\lambda' = 266^0\ 27'\ 22''$	$\beta' = +\ 22^0\ 52'\ 18''$
21.59931	$\lambda'' = 256^0\ 48'\ 8''$	$\beta'' = +\ 9^0\ 53'\ 12''$

$$L = 197^0\ 47'\ 41'' \qquad \log R = 0.00091$$
$$L' = 204^0\ 38'\ 45'' \qquad \log R' = 0.00175$$
$$L'' = 211^0\ 31'\ 25'' \qquad \log R'' = 0.00260$$

Damit erhält man

$$\log M = 9.75799, \qquad 6kt' = 1.4501$$

$$r = \sqrt{1.00420 + 0.56981\,\varrho + 1.30810\,\varrho^2}$$

$$r'' = \sqrt{1.01205 + 0.81092\,\varrho + 0.33805\,\varrho^2}$$

$$s = \sqrt{0.05765 - 0.22389\,\varrho + 0.42612\,\varrho^2}.$$

Nun suche man (durch passende Wahl von ϱ) die Werthe von r, r'', s so zu bestimmen, dass der Gleichung

$$(r + r'' + s)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - s)^{\frac{3}{2}} - 6kt' = X = 0$$

genügt wird. Setzt man $\varrho = 1$, so wird $r = 1.70$, $r'' = 1.47$, $s = 0.51$ und $X = +\ 1.27$; also ist ϱ zu gross. Setzt man $\varrho = \frac{1}{2}$, so wird $r = 1.26$, $r'' = 1.23$, $s = 0.23$ und $X = -\ 0.35$; also ϱ zu klein. Aus den beiden Werthen für X schliesst man, dass ϱ nahe $= 0.6$ ist. Man erhält nun mit den Werthen $\varrho = 0.60$ und $\varrho = 0.65$

$\varrho = 0.60$	$\varrho = 0.65$
$r = 1.34797$	$r = 1.38830$
$r'' = 1.27290$	$r'' = 1.29690$
$s = 0.27700$	$s = 0.30358$
$X = -\ 0.1055$	$X = +\ 0.0598$

und damit $\varrho = 0.632\ldots$ Rechnet man mit $\varrho = 0.632$ und $\varrho = 0.637$, so wird

$\varrho = 0.632$	$\varrho = 0.637$
$r = 1.37364$	$r = 1.37770$
$r'' = 1.28824$	$r'' = 1.29065$
$s = 0.29386$	$s = 0.29656$
$X = -\ 0.0125$	$X = +\ 0.0022$

und damit $\varrho = 0.63625.$ Nun wird

$$\log \varrho = 9.80364, \qquad \log \varrho'' = 9.56163$$

$$l = 225^0\,4'\,22'', \quad b = +\ 14^0\,51'\,39'', \quad \log r = 0.13896$$

$$l'' = 223^0\,6'\,55'', \quad b'' = +\ 2^0\,49'\,28'', \quad \log r'' = 0.11068.$$

Da $l > l'$ ist, so ist $i > 90^0$. Damit erhält man

$$i = 98^0\,58'\,57''$$

$$\Omega = 42^0\,40'\;\;8''$$

$$u = 164^0\,57'\;\;1'', \qquad u'' = 177^0\;\;8'\,36''$$

$$v = -\,40^0\,11'\,16'', \qquad v'' = -\,27^0\,59'\,41''$$

$$\Pi = 247^0\,48'\,25''$$

$$\log q = 0.08469.$$

Für die Perihelzeit T erhält man

aus v ... $T =$ April 49.518

aus v'' ... $T =$ April 49.517

also im Mittel $T =$ Mai 19.5175.

Berechnet man mit diesen Elementen den mittleren Kometenort, so findet man

$$\lambda' = 266^0\,27'\,15'', \quad \beta' = +\,22^0\,52'\,18''.$$

Die Länge stimmt bis auf 7″, die Breite vollkommen mit der Beobachtung überein.

Anhang.

1) Um einen in Theilen des Halbmessers gegebenen Winkel $= x$, in Graden $= x^0$ auszudrücken, verfährt man auf folgende Art:

$$x : x^0 = 2\pi : 360^0$$

also $x = \frac{2\pi}{360} \cdot x^0 = \frac{2\pi}{360.60} \cdot x' = \frac{2\pi}{360.60^2} \cdot x''$, wo x^0, x', x'' der Winkel ist, resp. in Graden, Minuten, Secunden ausgedrückt. $\frac{2\pi}{360.60^2}$ ist der in Theilen des Halbmessers ausgedrückte Bogen für den Centriwinkel $= 1''$, dieser Bogen ist sehr nahe $= \sin 1''$. Es ist daher $x = x'' \cdot \sin 1''$, $x'' = x : \sin 1'' = 206264.81\, x$. In der Gleichung $M = E - e \sin E$ sind M und E in Theilen des Halbmessers ausgedrückt. Um diese Gleichung auf das Gradmass zu beziehen, denke man sich M und E in Secunden beibehalten und e in Secunden ausgedrückt, was durch Multiplication mit der Zahl 206264.81 geschieht. Um M unmittelbar in Secunden zu erhalten, braucht man nur in dem Ausdrucke für $M = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}\, t$ die Zahl k in Secunden auszudrücken, wodurch man

$$k = 3548''.18761, \qquad \log k = 3.5500066$$

erhält.

2) *Regula falsi.* Ist $X = 0$ eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten x, w eine bestimmte Wurzel, a, a' zwei Näherungswerthe von w; so sei für

$$\begin{array}{ll} x = w & X = 0 \\ x = a & X = A \\ x = a' & X = A'. \end{array}$$

Sind $a - w$, $a' - w$ klein, so gilt näherungsweise

$$a - w : a' - w = A : A'$$

woraus $w = a - \frac{A(a - a')}{A - A'}$ folgt. Es ist vortheilhaft, die Näherungen a und a' so zu wählen, dass die Wurzel w zwischen dieselben fällt.

3) Ist h klein, so lässt sich die positive Wurzel y der kubischen Gleichung des Art. 6. durch folgende Reihe darstellen:

$$y = 1 + \tfrac{10}{9} h - \tfrac{110}{81} h^2 + \tfrac{2410}{729} h^3$$

$$\log y = [9.683542] h - [9.93341] h^2 + [0.3281] h^3,$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Für grössere Werthe von h, etwa von 0.02 an, kann man sich nach dieser Reihe Näherungswerthe von y verschaffen, und dann vermittelst der *regula falsi* den genauen Werth aus der cubischen Gleichung bestimmen.

4) Für die Bahnbestimmung ist es sehr vortheilhaft, wenn die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten, und der zweiten und dritten Beobachtung nahezu gleich sind. Denn aus dem in 3) gegebenen Ausdrucke für y folgt:

$$y = 1 + \tfrac{10}{9} h - \ldots, \qquad y'' = 1 + \tfrac{10}{9} h'' - \ldots,$$

$$h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l}, \qquad h'' = \frac{m''^2}{\frac{5}{6} + l''}.$$

Für $t = t''$ ist l nahezu $= l''$, m nahezu $= m''$; also h näherungsweise $= h''$. Der Unterschied $y - y''$ ist dann eine Grösse der dritten oder noch höherer Ordnung.

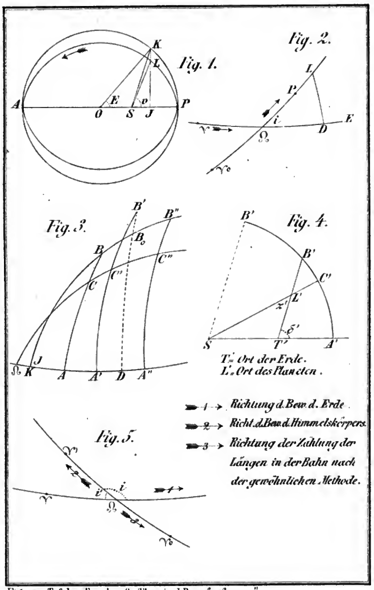
5) Directe und retrograde Bewegung. Statt die Neigung der Bahn nach Gauss von 0 bis 180° zu zählen, zählt man dieselbe auch von 0 bis 90° und unterscheidet zwischen directer und retrograder Bewegung. Ist die Neigung der Bahn grösser als 90°, so nimmt man das Complement der Neigung, fügt aber hinzu, dass die Bewegung retrograde sei, während man sie in dem andern Falle (wo $i < 90^0$ ist) directe nennt. In diesem Falle werden die Längen in der Bahn von einem Puncte γ' (Fig. 5) gezählt, welcher in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers ebenso weit entfernt ist, wie der aufsteigende Knoten vom Frühlingsäquinoctium. Die Längen in der Bahn werden in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung gezählt. Ist nun (Fig. 5) γ_0 der künstliche Frühlingspunct in der Bahn nach der Gauss'schen, γ' der künstliche Frühlingspunct nach der älteren (gewöhnlichen) Zählung; bedeuten i, Ω, A Neigung Länge des Knotens, Länge in der Bahn nach der Gauss'schen, i', Ω', A' dieselben Grössen nach der älteren Zählung; so findet folgender Zusammenhang statt:

$$i + i' = 180^0, \quad \Omega = \Omega', \quad A + A' = 2\Omega.$$

Für die Längen des Perihels hat man daher $\Pi + \Pi' = 2\Omega$. Ist u das Argument der Breite, d. i. die Entfernung des Himmelskörpers vom Knoten, v die wahre Anomalie d. i. die Entfernung vom Perihel, beide Grössen in der Richtung der Bewegung gezählt, so ist

$$u = \Omega' - A' = A - \Omega, \qquad v = \Pi' - A' = A - \Pi.$$

Für das in Art. 21. gegebene Beispiel hat man $i' = 81^0\ 1'\ 3''$, $\Pi' = 197^0\ 37'\ 51''$, muss aber den Zusatz machen „Bewegung retrograde".



Figuren-Tafel zu Frischauf's „Theorie d Bewegung u.s.w."

